Come prima cosa dobbiamo definire i due aperti per poter utilizzare il Teorema di Van-Kampen. Sia $(U)_1 = U \cup D$ dove U un intorno aperto della diagonale del quadrato Q, e sia $\mathcal{U}_2 = X \setminus D'$ dove D' è un disco chiuso totalmente contenuto nel disco D. L'intersezione di questi due spazi altro non è che l'intorno U considerato che è omeomorfo ad S^1, mentre $\mathcal{U}_1$ è omotopo a D contraendo $\mathcal{U}_1 \cap Q$ e $\mathcal{U}_2$ è omotopo a Q alla stessa maniera. Ora vediamo che, dato $x \in U$:

$$\pi(\mathcal{U}_1, x) = \{e\}, \pi(\mathcal{U}_2, x) = \langle a, b \,|\, aba^{-1}b^{-1} \rangle, \pi(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2, x) = \langle \gamma \,|\, \varnothing \rangle,$$

dove a e b sono i lati di Q e γ è il circuito della diagonale (ricordiamo che tutti i vertici sono identificati ad un punto). Ora le due inclusioni di γ negli aperti sono date da:

$$i_1^\star(\gamma) = e, i_2^\star(\gamma) = ba^{-1},$$

e quindi possiamo concludere grazie a Van-Kampen:

$$\pi(X, x) = \langle a, b \,|\, aba^{-1}b^{-1}, e = ba^{-1} \rangle = \langle a \,|\, \varnothing \rangle \cong \mathbb{Z}.$$

Grazie a quanto sappiamo della classificazione delle superfici compatte sappiamo che non ne esiste nessuna che ha gruppo fondamentale pari a $\mathbb{Z}$.

Procediamo utilizzando il teorema dei residui, la nostra funzione $f(z) = \frac{1}{z^2(z-\frac{1}{2})}$ presenta un polo di ordine 2 in $z_1 = 0$ e un polo di ordine 1 in $z_2 = \frac{1}{2}$. Calcolando i residui otteniamo:

$$Res_{z_1}(f) = \lim_{z \to z_1} \frac{d}{dz}(z - z_1)^2 f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} \frac{1}{z - \frac{1}{2}} = \lim_{z \to 0} -\frac{1}{(z - \frac{1}{2})^2} = -4,$$

$$Res_{z_2}(f) = \lim_{z \to z_2} (z - z_2) f(z) = \lim_{z \to \frac{1}{2}} \frac{1}{z^2} = 4.$$

Ora applicando il teorema dei residui si ha che il nostro integrale $I = 2\pi i * (-4 + 4) = 0$.

Per prima cosa utilizziamo il teorema di Cauchy con $f(z) = \frac{2z+1}{z+1}$ e come punto $P = 0$ che è all'interno della circonferenza. Grazie al teorema si ha che:

$$\int_\gamma \frac{2z + 1}{z^2 + z} dz = 2\pi i * f(0) = 2\pi i.$$

Ora per il teorema dell'argomento dobbiamo considerare una nuova funzione $g(z) = z^2 + z$ e si vede subito che $\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{2z+1}{z^2+z}$ che è la funzione che vogliamo integrare. g presenta due zeri di ordine $z_1 = 0$ e $z_2 = -1$ ma solamente il primo sta all'interno della circonferenza γ che ricordiamo avere raggio $\frac{1}{2}$. Quindi per il teorema dell'argomento abbiamo che:

$$\int_\gamma \frac{2z + 1}{z^2 + z} dz = 2\pi i * ord_f(0) = 2\pi i.$$

I due metodi, come ci si aspetterebbe, hanno restituito lo stesso risultato.